Lorenzo Peña

«Una cadena de reforzamientos difusos de la lógica del entrañamiento»

Actas del* III *Congreso español de tecnologías y lógica fuzzy
ed. por S. Barro & A. Sobrino.

Santiago de Compostela: Universidad de Santiago, 1993
pp. 115-22.
ISBN 84-604-7510-7

UNA CADENA DE REFORZAMIENTOS DIFUSOS DE LA LÓGICA DEL ENTRAÑAMIENTO

Lorenzo Peña

Instituto de Filosofía del CSIC

Pinar 25, E-28006 Madrid, Spain

Fax # +34)915645252

∈_mail: lorenzo@sorites.org

RESUMEN

El sistema de lógica del *entailment* de Anderson & Belnap, **E**, fue construido atendiendo a motivaciones muy alejadas de las que animaron a la puesta en pie de los sistemas fuzzy. Sin embargo, el presente trabajo muestra que cabe desarrollar un tratamiento fuzzy aprovechando la construcción de **E**. La idea central de **E** es que ⌜p→q⌝ es verdadero si y sólo si hay una deducción natural de ⌜q⌝ a partir de ⌜p⌝ y eso se nota en que en la deducción ⌜p⌝ no es una premisa ociosa. Reinterpretamos aquí ese vínculo de relevancia en el sentido de que el grado de falsedad de la conclusión no exceda al de las premisas. Reforzando el sistema **E** con una serie de axiomas adicionales, obtenemos una lógica conforme con tal lectura.

§1. ALGUNAS ANOMALÍAS DE LA LÓGICA DEL ENTRAÑAMIENTO

El sistema lógico del entrañamiento, **E**, proclamado por sus fundadores, A&B [Anderson y Belnap], como una lógica a la vez de la relevancia y la necesidad (véase [And&Bel), pp.23ss), se ha revelado, ciertamente, menos estable de lo que se había supuesto —habiéndose propuesto ya un amplio abanico de reforzamientos, esp. por los autores de [RLR], pp. 242ss—, y de hecho aun A&B se dieron cuenta de que pueden añadirse al sistema **E** varios axiomas que no van en contra de la motivación del sistema [And&Bel], pp. 340-1. (El hecho ha sido subrayado e investigado desde una amplia gama de perspectivas filosóficas; véase p.ej. la discusión de Orayen en [Orayen], n.14, p. 86.) Sin embargo, el sistema **E** es un paradigma de lógica entrañamental. Aquellos reforzamientos que se han propuesto o no tienen transcendencia lógica significativa o acarrean un abandono de al menos una parte de la motivación inicial —la relevancia— según viene caracterizada por las pautas del uso-en-la-prueba y del compartir variables —que no obstante son constreñimientos diferentes y separables, según lo han mostrado Méndez (véase [Méndez]), Avron (véase [Avron]) y otros autores.

Sin embargo, al sistema **E** aflígenlo varios defectos. Varios de ellos ya han venido apuntados tanto por la escuela del relevantismo hondo que encabeza Richard Sylvan en [RLR] y en muchos otros lugares cuanto por los ya mencionados Méndez y Avron. Otros de los defectos no han sido destacados todavía.

He aquí algunos de tales inconvenientes. En primerísimo lugar la regla de Adjunción —*Adj* para abreviar— (a saber $\ulcorner p \urcorner, \ulcorner q \urcorner \vdash \ulcorner p \wedge q \urcorner$) se introduce como una regla de inferencia primitiva adicional, sin ninguna justificación, mas —peor que eso— es una regla que está aguada en cualquier implementación de **ND** (**deducción natural**) del sistema —de hecho la regla se aplica sólo dentro del dominio de la lógica, al no permitir el sistema una aplicación general de la regla en virtud de la cual, de cualesquiera dos premisas $\ulcorner p \urcorner$ y $\ulcorner q \urcorner$, pueda sacarse la conclusión $\ulcorner p \wedge q \urcorner$. Cualquier aplicación del sistema **E** a una teoría no-lógica tiene que acudir a aceptar sólo un axioma no-lógico de la teoría, que será la conyunción de todos sus axiomas «ordinarios». En esa medida cabe tildar al sistema **E** de no-conyuntivo o no-copulativo, si bien no renuncia completamente a *Adj*, cual lo hacen otros sistemas paraconsistentes (la lógica discusiva de Jaśkowski (véase [Cos&Dub]) o el enfoque modal de Rescher & Brandom (véase [Res&Bra]).

Además, la motivación nuclear de la lógica entrañamental fué el Principio de Entrañamiento ([And&Bel], pp. 277-8), a saber que una inferencia de $\ulcorner p \urcorner$ a partir de premisas $\ulcorner q^1 \urcorner, \ulcorner q^2 \urcorner, \ldots, \ulcorner q^n \urcorner$ es válida sys $\ulcorner r \rightarrow p \urcorner$ es un teorema lógico, donde $\ulcorner r \urcorner$ es la conyunción de $\ulcorner q^1 \urcorner, \ulcorner q^2 \urcorner, \ldots, \ulcorner q^n \urcorner$. Así, el sistema **E** —al revés de lo que hacen las lógicas relevantes «hondas»— entroniza la Afirmación Conyuntiva ($\ulcorner p \rightarrow q \wedge p \rightarrow q \urcorner$). Mas sin una regla de *Adj* sin trabas no podemos en general concluir $\ulcorner p \rightarrow q \wedge p \urcorner$ a partir de $\ulcorner p \rightarrow q \urcorner$ y $\ulcorner p \urcorner$. Así, **E** nos impide aplicar prácticamente el Principio de Entrañamiento, o sea en primer lugar sacar de $\{\ulcorner p \rightarrow q \urcorner, \ulcorner p \urcorner\}$ la conclusión $\ulcorner p \rightarrow q \wedge p \urcorner$ y luego a partir de esa conyunción sola inferir $\ulcorner q \urcorner$.

Además, el sistema **E** postula un principio de distributividad que también causa serias dificultades para las implementaciones de **ND** y de Gentzen (véase [Dunn]), y que en cualquier caso es suficientemente retorcido como para que merezca ser un teorema probado en vez de venir postulado como un axioma.

No menos sorprendente es la ausencia de Factor, un principio investigado por R. Sylvan. (Sobre este punto, mis argumentos epilogan los de [Syl&Urb], que es el principal estudio de Factor existente.) Factor es $\ulcorner p \rightarrow q \rightarrow .p \wedge r \rightarrow .q \wedge r \urcorner$. Al carecer de eso, el sistema **E** no nos permite concluir que las cabezas de caballos son cabezas de animales de la premisa de que los caballos son animales. Signifique ‘p’ ‘x es un caballo’; ‘q’, ‘x es un animal’; ‘r’, ‘z es la cabeza de x’; entonces la inferencia querida sería: $\forall x(p \rightarrow q) \vdash \forall x(\exists z(p \wedge r) \rightarrow \exists z(q \wedge r))$; mas en una extensión cuantificacional de **E** podemos probar sólo esto: $\forall x,z(p \rightarrow q \wedge .r \rightarrow r)) \vdash \forall x(\exists z(p \wedge r) \rightarrow \exists z(q \wedge r))$. (Los axiomas para introducir los cuantificadores son improblemáticos.) Es decir no podemos simplemente presuponer que lo que es la cabeza de un animal es su cabeza; necesitamos enunciaarlo como una premisa adicional, aunque sea un teorema lógico. Igualmente, el carecer de Factor entraña que la teoría de conjuntos va a hacerse inútil: definamos la inclusión, ‘$x \subseteq z$’, como ‘$\forall u(u \in x \rightarrow u \in z)$’; entonces sin Factor perdemos los siguientes principios teórico-conjuntivos: $\ulcorner x \subseteq z \rightarrow \forall v(x \cap v \subseteq z \cap v) \urcorner$; $\ulcorner x=z \rightarrow \forall u(u \cap x=u \cap z) \urcorner$, siendo definida la igualdad como inclusión mutua; y aunque sentemos el principio de extensionalidad, $\ulcorner \forall x,z(x=z \rightarrow \forall v(x \in v \rightarrow z \in v)) \urcorner$, nos vemos —sin Factor— incapaces de concluir que $\ulcorner x=z \rightarrow .p[x]p \rightarrow [x/z] \urcorner$ (sea ‘p’, p.ej., ‘$x \in u \wedge u \in y$’). Mas postular la extensionalidad en la versión más fuerte del esquema $\ulcorner \forall x,z(x=z \rightarrow .p[x] \rightarrow p[x/z]) \urcorner$ produce $\ulcorner x=z \rightarrow .p \rightarrow p \urcorner$, aunque no haya ninguna ocurrencia de ‘x’ en ‘p’; lo cual es precisamente una versión teórico-conjuntiva de lo que A&B trataban de evitar al proscribir Factor, a saber $\ulcorner p \rightarrow q \rightarrow .r \rightarrow r \urcorner$.

Es interesante que Factor es —no ya cuando se añade a **E** sino aun dentro de muchos sistemas más debiles de lógica relevante «honda»— equivalente a Inclusión, a saber el principio $\ulcorner p\to qI.p\wedge qIp\urcorner$, donde ‘I’ es implicación mutua. La motivación de Inclusión es que $\ulcorner p\urcorner$ implica a $\ulcorner q\urcorner$ sys el «contenido» de $\ulcorner q\urcorner$ está incluido en el de $\ulcorner p\urcorner$, e.e. sys $\ulcorner p\urcorner$ es equivalente a $\ulcorner p\wedge q\urcorner$ —de modo que al alcanzar $\ulcorner q\urcorner$ sólo se expresa algo implícitamente contenido en $\ulcorner p\urcorner$. Tal idea ha sido ampliamente invocada en apoyo a la lógica relevante. Y, sin embargo, sólo lógicas relevantes sumamente débiles pueden admitir Factor (o Inclusión); porque, si una lógica tiene *MP*, *Adj*, la regla de transitividad ($\ulcorner p\to q\urcorner$, $\ulcorner q\to r\urcorner$ $\vdash$ $\ulcorner p\to r\urcorner$), Conmutatividad de la disyunción y de la conyunción, Adición ($\ulcorner p\to.p\vee q\urcorner$) y Simplificación ($\ulcorner p\wedge q\to p\urcorner$), entonces, si tiene o bien Idempotencia de la conyunción ($\ulcorner p\to.p\wedge p\urcorner$) o de la disyunción ($\ulcorner p\vee p\to p\urcorner$), o, si no, la Distributividad mutua, tiene como un teorema $\ulcorner p\to p\to.q\to q\urcorner$. (Véase [Syl&Urb] nuevamente.)

Gravísimo es que el sistema **E** permite la supresión (u omisión) de entrañamientos demostrados sólo en forma exportada, mas no en forma importada. Eso es extrañísimo, puesto que A&B ([And&Bel], p.262) alegan que la omisión es lo que lleva a la errónea ley de exportación en **CL** (la Lógica Clásica). **E** otorga un estatuto privilegiado a las fórmulas implicacionales entronizando principios como el de Supresión ($\ulcorner p\to p\to q\to q\urcorner$) y transitividad exportada ($\ulcorner p\to q\to.q\to r\to.p\to r\urcorner$), cuando la única manera natural de justificarlos es permitir la Exportación para fórmulas implicacionales, debido a su estatuto especial —algo que **E** no llega a aceptar. Así aunque a partir de $\ulcorner p^1\to p^2\to.q\to r\to s\urcorner$ —con tal de que $\ulcorner q\to r\urcorner$ sea un teorema— podemos deducir $\ulcorner p^1\to p^2\to s\urcorner$, no podemos sacar la misma conclusión a partir de $\ulcorner p^1\to p^2\wedge(q\to r)\to s\urcorner$, aun cuando $\ulcorner q\to r\urcorner$ sea un teorema lógico. Conque $\ulcorner p\to q\wedge(r\to r)\to s\to.p\to q\to s\urcorner$ no es un teorema de **E**. Según eso, ¡una conyunción de dos fórmulas implicativas no ha de venir considerada en absoluto como una fórmula implicativa!

Aunque esos diversos defectos pueden parecer inconexos, de hecho vienen de la misma fuente: el estatuto debilitado de la conyunción y el carecer de lo que podemos llamar axiomas de interpolación —axiomas que son más sencillos y por los cuales los axiomas menos obvios de **E** se harían teoremas demostrables.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

§2. UNA LÓGICA DE LA DIFUSIDAD RESULTANTE DE REFORZAR EL SISTEMA E

Tomando como punto de partida las consideraciones precedentes, voy a proponer una cadena de reforzamientos del sistema **E** que lo curen de las anomalías. Lo que es más interesante es que los sistemas resultantes son claramente interpretables como lógicas de la difusidad o la gradualidad. Así el functor ‘$\to$’de **E**, debidamente fortalecido, recibe una atractiva interpretación como ‘en la medida [por lo menos] en que’. Dotado de tal lectura, el functor ha de ser más fuerte que la flecha original de **E**, bajo presuposiciones naturales acerca de la estructura de los grados de verdad.

Así, los sistemas resulantes están más cercanos a **CL**. No son relevantes, en el sentido de que no cumplen con los constreñimientos relevantistas —al menos no con el de compartir variables. Cumplen el constreñimiento de uso-en-la-prueba, con algunas adaptaciones. Mas la implementación de la **ND** no entra en el presente trabajo. Los sistemas resultantes de lógica difusa o gradualista son intermedios entre la lógica clásica y la del entrañamiento. La aproximación a **CL** va todavía más allá. De hecho, varios de los sistemas contienen toda la **CL**, y son realmente extensiones conservativas de **CL**. Sólo que a la negación '¬' de **CL** se le da ahora una lectura diferente de la acostumbrada. Se lee ahora como 'no…en absoluto'. La negación clásica es negación completa —el functor que envía lo [en una u otra medida] verdadero sobre la falsedad completa, y lo del todo falso sobre la verdad completa. Estos sistemas son a **CL** como la lógica relevante trataba de ser a la lógica intuicionista.

Todos estos sistemas tienen las leyes de no-contradicción y de tercio excluso. Son sistemas paraconsistentes copulativos. Paso ahora a construir la cadena.

Sistema P0 = E

Sistema P1 = P0 + Factor

Sistema P2 = P1 + Linearización (⌜p→q∨.q→p⌝)

Sistema P3 = P2 + el Principio Self-Self (⌜N(p→p→N(p→p))→.p→p⌝)

Sistema P4 = P3 + IF [Embudo Implicacional] (⌜p→q∨.p→q→r⌝)

Sistema P4.5 = P4 + Mingle = **CL**. Mingle es ⌜p→.p→p⌝

Sistema P5 = P4 + uno de éstos: Aristóteles (⌜N(p→Np)⌝), Boecio (⌜p→q→N(p→Nq)⌝) o Contradicción (a saber, para alguna constante sentencial particular, j: ⌜j∧Nj⌝)

Sistema P6 = P4 + estos dos principios: ⌜p→q→.NHNHp→Hq⌝ y ⌜Hp→q∨.Np→r⌝ ('H' se lee: 'Es del todo verdad que').

Sistema P3.5 = P3 + esos dos principios que involucan a 'H' = P6 menus IF

Sistema P7 = P6 + ⌜Hp∨Np⌝

Sistema P8 = P3.5 + estos dos: ⌜α⌝ y ⌜α→p∨.p→q⌝ ('α' es una constante sentencial que significa a la conyunción de todas las verdades)

Sistema P8.5 = P8 + ⌜Hα⌝ = **CL**

Sistema P9 = P8 + ⌜NH(α→α)⌝

Sistema P10 = P8 + ⌜HN(Nα→α)⌝

Puede probarse que P8 contiene P7; que P10 contiene P9; que P9 contiene P5; que P8 es una extensión conservativa de **CL** (si la negación clásica, '¬', se define como 'HN'), y que P5 y aquellos sistemas que contienen a P5 no son meramente paraconsistentes sino contradictoriales (tienen el teorema de Heráclito: ⌜N(p→p)⌝). (De hecho, ⌜N(p→p)→(p→p)→(p→p)→N(p→p)→N(N(p→p)→(p→p)→(p→p)→N(p→p))⌝ es un teorema de **E**; la apódosis es la negación de la prótasis; cuando agregamos el principio de Aristóteles o el de Boecio, el resultado es inmediato: la negación del teorema es también un teorema. Mas en P1 probamos ⌜p∧Np→N(q→q)⌝.)

Entre todos esos sistemas, P5 y P10 son con mucho los más importantes. Son los más estables. La motivación principal para pasar de P4 a P6 y más arriba es la de englobar a **CL** dentro de la lógica difusa, como el caso extremo en que se trata de o bien falsedad completa o no (alternativamente de o bien verdad completa o no). El sistema P8 y los que están por encima de él permiten implementar el condicional clásico (que puede definirse de la manera usual con negación fuerte, '¬', y disyunción, '∨') del modo relevantemente recomendado: ⌜p⊃q⌝ sys hay alguna verdad, a saber 'α', tal que ⌜p∧α→q⌝.

Ofrécense más abajo varias axiomatizaciones de tipo Hilbert, más elegantes que la presentación genética recién descrita. He aquí una axiomatización para P5 con diez axiomas y una regla de inferencia primitiva:

Símbolos primitivos: '∧', 'N', '→'. 'p', 'q' etc se usan como letras esquemáticas. Las convenciones notacionales son como las de Church.

Definiciones: ⌜p∨q⌝ abr ⌜N(Np∧Nq)⌝; ⌜❖p⌝ abr ⌜N(p→Np)⌝

P5a01 p→q→r∧(q→p→r)→r

P5a02 p→q∧(q→r)→.p→r

P5a03 p∧q∧r→.r∧p∧q

P5a04 p∧q→p

P5a05 p→q→r→s∧(❖(p→p)→(p→q)→s)→s

P5a06 p→q→.r→s→.p→q∧.r→s

P5a07 p→q→.p→.p∧q

P5a08 Np→q→N(p→q)

P5a09 p→Nq→.q→Np

P5a10 NNp→p

Regla de Inferencia: DMP (e.d.*modus ponens* disyuntivo): para n≥1:

p^1→q∨(p^2→q)∨…∨.p^n→q, p^1, …, p^n ⊦ q

MP [Modus Ponens] es un caso particular de esa regla —aquel en que n=1. *Adj* es una regla derivada de inferencia.

El significado de *DMP* es que deducir ⌜q⌝ a partir de un número de premisas es mostrar que ⌜q⌝ se deduce a partir de por lo menos una de ellas. Lo cual no significa que necesariamente haya una prueba a partir de una de las premisas sola, puesto que la prueba entera de la conclusión a partir de las premisas consiste en mostrar que o se sigue de la primera premisa, o de la segunda premisa, etc. Esas deducciones no son pruebas completas, sino ramas de pruebas o sub-pruebas alternativas.

Cinco axiomatizaciones alternativas del sistema P5 vienen ofrecidas ahora. Para la 2ª, 3ª, 4ª y 5ª se tienen las mismas definiciones y misma regla de inferencia (*DMP*) que arriba. (En el caso de la axiomatización 5ª, la regla puede restringirse.)

2ª axiomatización

P5b01 p→p→q→q

P5b02 p→q∧(q→r)→.p→r

P5b03 p∧q∧r→.r∧p∧q

P5b04 p∧q→p

P5b05 p→q→p→p (si ⌜p⌝ es una fórmula implicacional)

P5b06 p→.q→.p∧q (si ⌜p⌝ y ⌜q⌝ son fórmulas implicacionales)

P5b07 p→q→.p→.p∧q

P5b08 N(Np→p)

P5b09 p→Nq→.q→Np

P5b10 NNp→p

P5b11 p→q∨.q→p

P5b12 ❖(p→p)→.p→p

3ª axiomatización

P5c01 p→q→r→.q→p→r→r

P5c02 p→q→.q→r→.p→r

P5c03 p∧q∧r→.r∧p∧q

P5c04 p∧q→p

P5c05 ❖(p→p)→.p→p

P5c06 p→(q→r)→.p∧q→r

P5c07 ❖Np→Np→.p→q→p→p

P5c08 p→q→.p→.p∧q

P5c09 Np→p→p (o, alternativamente: p∧Nq→N(p→q))

P5c10 p→Nq→.q→Np

P5c11 NNp→p

P5c12 p→Nq→N(p→q) (o, alternativamente, Θ∧NΘ, siendo 'Θ' una constante primitiva)

4ª axiomatización

P5d01 p→p→q→q

P5d02 p→q→.q→r→.p→r

P5d03 p∧q∧r→.r∧p∧q

P5d04 p∧q→p

P5d05 p→q→r∨.p→q

P5d06 p→q→(q→p)→.q→p

P5d07 p→q→.p→.p∧q

P5d08 Np→p→p

P5d09 Np→q→.Nq→p

P5d10 p→NNp

P5d11 p→q→N(Np→q))

P5d12 N(p→p)→.p→p→N(p→p)

5ª axiomatización

P5e01 p→q→.q→r→.p→r

P5e02 p∧q→p

P5e03 p→q→.r∧p→.q∧r

P5e04 NNp→.p∧p

P5e05 p→q→r∨.p→q

P5e06 p→q→r∧(q→p→r)→r

P5e07 p→Nq→N(p→q)

P5e08 p→q→N(p∧Nq)

P5e09 p→Nq→.q→Np

P5e10 ❖(p→p)→.p→p

La regla *DMP* puede —en esta axiomatización— debilitarse exigiendo que n≥2, gracias a P5e05, e.e. IF —tomando como una instancia de ese esquema: ⌜p→q→q∨.p→q⌝; aplícase otro tanto a cualquier otra fórmula con el mismo tenor disyuntivo del axioma, p.ej. la cuarta axiomatización con P5d05. *MP* puede verse como entimemático.

6ª axiomatización

Primitivos: ∨, t , Θ, N. ⌜p↔q⌝ abr ⌜p→q∧.q→p⌝; ⌜p∧q⌝ abr ⌜N(Np∨Nq)⌝. 't' es un nuevo primitivo (que quiere significar la conyunción de todas las verdades implicativas). 'Θ' es una constante sentencial cuyo sentido no nos concierne aquí. Dos reglas de inferencia: *MP* y *Adj*.

P5f01 $t\to p\to p$

P5f02 $p\to q\to .q\to r\to .p\to r$

P5f03 $p\to (p\to q)\to .p\to q$

P5f04 $p\to .p\lor q$

P5f05 $q\to .p\lor q$

P5f06 $p\to q\to .r\to q\to .p\lor r\to q$

P5f07 $p\to Np\to Np$

P5f08 $p\to Nq\to .q\to Np$

P5f09 $NNp\to p$

P5f10 $N\Theta\to\Theta\land .\Theta\to .\Theta\to N\Theta$

P5f11 $t\to .p\to q\lor .q\to p\land .p\to q\to r$

Probamos que $\ulcorner\Theta\leftrightarrow t\urcorner$. De hecho, podríamos usar uno solo de esos dos primitivos, salvo que por razones filosóficas es mejor probar su equivalencia que postularla.

Sobre la base de P4 los siguientes son equivalentes (y todos ellos acarrean un derrumbamiento en **CL**):

$p\leftrightarrow q\lor .q\leftrightarrow r\lor .p\leftrightarrow r$ (e.e. la fórmula de Dugundji en 3 letras esquemáticas)

$p\to .p\to q\to q$ (Aserción Exportada)

$p\to (q\to r)\to .q\to .p\to r$ (Permutación)

$p\land q\to r\to .p\to .q\to r$ (Exportación)

$p\land q\to r\to .p\land Nr\to Nq$ (Antilogismo)

$p^\circ q\to r\leftrightarrow .p\to .q\to r$ (El principio de «fusión», donde '$^\circ$' es un functor primitivo de «fusión»)

$p\to .q\to .p\land q$ (el Principio de Adjunción)

$p\to .p\to p$ (Mingle)

$p\land Np\to q$ (Cornubia)

$p\to .q\to p$ (VEQ)

$p\to q\lor .q\to r$

$N(p\to p)\to q$

$N(p\to p)\to .q\to .p\to p$

$N(p\to q)\to .p\to p$

$p\to .q\to q$

Ahora presentamos una axiomatización para P10 agregando a P5 los siguientes esquemas axiomáticos ('H' es un functor primitivo monádico, mientras $\ulcorner\neg p\urcorner$ abr $\ulcorner HNp\urcorner$ y $\ulcorner p\supset q\urcorner$ abr $\ulcorner\neg p\lor q\urcorner$):

P10a1 $\neg p\land p\to q$

P10a2 $p\to q\to .Hp\to Hq$

P10a3 $Hp\to p$

P10a4 $NHp\to\neg Hp$

P10a5 α

P10a6 $p\supset .\alpha\to p$

P10a7 H❖$N\alpha$

Puesto que en P10 podemos probar el Embudo (a saber $\ulcorner p\to q\lor p\urcorner$), hácese redundante IF (tal como se postula en todas las formulaciones precedentes de P5 —ya sea como tal o como Peirce implicacional, e.e. $\ulcorner p\to q\to p\to p\urcorner$ con tal de que $\ulcorner p\urcorner$ sea implicacional). Así ha de encontrarse una axiomatización más elegante de P10.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

§3. ALGUNOS RESULTADOS SOBRESALIENTES

He aquí una corta lista de esquemas teoremáticos y reglas que pueden probarse y derivarse, respectivamente, en P10:

$p\supset q$, $p \vdash q$	$\neg p\wedge\neg q\leftrightarrow\neg(p\vee q)$	$p\supset .q\supset .p\wedge q$
$p\to q\supset .p\supset q$	$\neg p\vee\neg q\leftrightarrow\neg(p\wedge q)$	$p\to .q\supset p$
$p\supset q$, $\neg q \vdash \neg p$	$p\supset q \vdash p\vee r\supset .q\vee r$	$p\to .\neg p\supset q$

Puede probarse fácilmente que el fragmento de P10 en $<\wedge,\vee,\supset,\neg>$ es exactamente **CL** —de la cual, por lo tanto, P10 es una extensión conservativa. Miremos a P10 como el resultado de agrandar **CL** con dos nuevos functores, una negación no fuerte, ‘N’, y una implicación, ‘$\to$’. El sentido buscado es que $\ulcorner p\to q\urcorner$ es verdadero sys el grado de verdad de $\ulcorner p\urcorner$ es menor que el de $\ulcorner q\urcorner$ o igual a él, ya que $\ulcorner Np\urcorner$ es tan verdadero {falso} como $\ulcorner p\urcorner$ es falso {verdadero} —e.d. la negación natural o sencilla invierte el orden expresado por ‘$\to$’, y eso es todo lo que hace. En el presente contexto leeríamos la negación clásica, ‘$\neg$’, como ‘no…en absoluto’.

La existencia de dos condicionales (el mero condicional, ‘$\supset$’, y la implicación, ‘$\to$’) entraña que hay en P10 dos relaciones de deducción diferentes. Podemos tener ‘$\vdash$’ como expresando mera inferencia, mientras usamos ‘$\Vdash$’ como expresando una relación de inferencia más fuerte, a saber: $p^1, \ldots, p^n \Vdash_{P10} q$ sys $\ulcorner p^1\ldots p^n\to q\urcorner$ es un teorema de P10; mientras que para ‘$\vdash$’ tenemos el metateorema clásico de la deducción, a saber: $p^1, \ldots, p^n, r \vdash_{P10} q$ sys $p^1,\ldots,p^n \vdash_{P10} r\supset q$ —los teoremas son las fórmulas que son $\vdash$-inferidas a partir de un antecedente vacío. Claramente si $p\Vdash q$ entonces $p\vdash q$. Nuestra teoría de pruebas ha de implementarse de tal forma que se tomen en cuenta esas diferencias.

El entrañamiento, debidamente reforzado, es un functor sensible a las diferencias de grado, mientras que el mero condicional, ‘$\supset$’, sólo toma en cuenta si las fórmulas son completamente falsas o no. **CL** es un sistema pobre, no uno malo. Su defecto consiste en el hecho que, careciendo una implicación y una negación sensibles a los grados, fuerza a la gente a pensar, legislar y actuar en términos de todo o nada —puesto que **CL** desconoce la diferencia entre ‘enteramente’ y ‘un poco’, viendo como meramente estilística, no semántica, la diferencia entre el *ser completamente cierto que* y el *ser [simplemente] cierto* [‘cierto’ en el sentido de ‘verdadero’].

He aquí un tratamiento semántico de P5 y P10. Por una P5-matriz significamos un álgebra $\mathcal{A}=<\mathcal{A},\mathcal{O},\mathcal{D}>$ donde $\mathcal{A}$ es un conjunto bien ordenado de entidades, $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{A}$, y $\mathcal{O}$ es un conjunto ordenado de operaciones $<N,\vee,\wedge,\to>$, siendo N unaria y las demás binarias y tales que hay tres elementos ½, 0, 1 que satisfacen estos postulados: 0 es el mínimo; 1, el máximo; $x\vee z = max(x,z)$; $x\wedge z = min(x,z)$; $x\leq z$ sys $Nx\geq Nz$; N ½=½; $\mathcal{D}$ es un filtro propio tal que $½\in\mathcal{D}$; $x\to z =$: ½ si $x\leq z$, y, si no, 0; $N0=1$; $NNx=x$. Sea $\mathcal{T}$ una extensión de P5. Una valuación, v, es una función de $\mathcal{T}$ a una P5-matrix, $\mathcal{A}$, tal que, para cualesquiera dos fórmulas, $\ulcorner p\urcorner$, $\ulcorner q\urcorner$, las condiciones usuales son satisfechas: $v(p\wedge q) = v(p)\wedge v(q)$, y similarmente para los demás functores y operaciones. Una fórmula $\ulcorner p\urcorner$ de $\mathcal{T}$ es válida sys cada valuación, v, es tal que $v(p)\in\mathcal{D}$ (el respectivo conjunto de entidades designadas dentro de su campo de valores). Una inferencia (e.e. un par ordenado $<\mathcal{C},\ulcorner p\urcorner>$ donde $\mathcal{C}$ es un conjunto de fórmulas) es válida sys cada valuación v que sea tal que, para cada $\ulcorner q\urcorner\in\mathcal{C}$,

$\mathcal{v}(q) \in \mathcal{D}$ es asimismo tal que $\mathcal{v}(p) \in \mathcal{D}$. Claramente, las P5-matrices son álgebras de Kleene (e.e. álgebras cuasi-booleanas que satisfacen el postulado de Kleene: que $x \wedge Nx \leq z \vee Nz$). De hecho se prueba fácilmente que cada P5-matriz finita es isomorfa a una cuyo portador es un subconjunto finito del conjunto de los números enteros tal que, para cada número entero positivo n a ella perteneciente, su negativo también pertenece, y recíprocamente: el ½ algebraico será el cero numérico, mientras el 1 algebraico será el número mayor del conjunto. La solidez y la completez se prueban fácilmente. Nótese, sin embargo, que ninguna de esas matrices [finitas] es característica. Mas formemos una P5-matriz infinita, $\mathcal{A}_\infty$, cuyo portador comprenda a un subconjunto infinito cualquiera de los números naturales, incluyendo a cero, y sus negativos respectivos, más ∞ y $-\infty$. Sea $\mathcal{D}$ $[0,\infty]$. Entonces $\mathcal{A}_\infty$ es característica en el sentido de que sólo todos los P5 teoremas son enviados a elementos designados, mas no es fuertemente característica: hay inferencias válidas (con respeto a $\mathcal{A}_\infty$) que no son derivables en el sistema P5 (p.ej. $\{\ulcorner p \urcorner, \ulcorner Np \urcorner, \ulcorner q \urcorner, \ulcorner Nq \urcorner\} \vdash \ulcorner p \rightarrow q \urcorner$). De otro lado si hacemos que el conjunto de valores designados abarque a todos los elementos excepto $-\infty$, habrá fórmulas válidas que no son teoremas de P5; p.ej. $\ulcorner p \rightarrow q \vee p \urcorner$ (Embudo).

Formemos una P10-matriz agregando a una P5-matrix una operación unaria adicional, H, y elementos adicionales, ω y α, tales que: $\omega = N\alpha$; $x \geq \alpha$ si $x \neq 0$; Hx=: 1 si x=1, y si no 0 (1 y 0 son los 1 y 0 algebraicos respectivamente). Una valuación es una función de una P10-teoría $\mathcal{T}$ a una P10-matriz (sentamos que $v(\alpha) = \alpha$ etc). Ahora, no sólo se obtienen la solidez y la completez sino que —cosa más importante— hácese disponible una matriz fuertemente característica: el conjunto de todos los números enteros más cuatro elementos adicionales, $\infty > \omega \geq$ cada número entero; y por supuesto cada número entero $\geq -\omega = \alpha > -\infty$, abarcando $\mathcal{D}$ a todos los elementos excepto $-\infty$. Esa matriz es la P10 matriz canónica.

Así P10 tiene la propiedad del modelo finito, a saber que cada extensión no-conservativa suya [que sea no-delicuescente, e.e. Post-consistente] tiene una matriz característica finita. Porque sea $\mathcal{L}$ una extensión tal de P10. Hay una fórmula o un esquema $\ulcorner p \urcorner$ en el vocabulario de P10 que es un teorema en $\mathcal{L}$ mas no en P10. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{v}$ una P10 álgebra y una valuación, respectivamente, tales que $\mathcal{v}(p)$ sea designado. La razón no puede ser que el conjunto de elementos designados haya sido ampliado, por supuesto. Si el portador de $\mathcal{B}$ es infinito, entonces $\mathcal{B}$ es isomorfa a la matriz canónica de P10. Así pues, $\mathcal{B}$ es finito. Lo cual entraña que para algún número natural n $\mathcal{L}$ es P10 más la fórmula de Dugundji en n disyuntos, a saber: $\ulcorner p^1 \leftrightarrow p^2 \vee \ldots \vee . p^1 \leftrightarrow p^n \vee \ldots \vee . p^{n-1} \leftrightarrow p^n \urcorner$. Ninguna de esas fórmulas es un teorema de P10.

Cuando se usan cuantificadores proposicionales con los postulados usuales (véase [And_Bel_Dun], pp. 19ss), —usando ‘j’ como una variable proposicional— definimos $\ulcorner {\sim} p \urcorner$ como $\ulcorner p \rightarrow \forall j j \urcorner$, y $\ulcorner p \Rightarrow q \urcorner$ como $\ulcorner \exists j (j \wedge p \rightarrow q \wedge j) \urcorner$; el fragmento del sistema resultante, $P10^{\exists\forall j}$, en $\langle \wedge, \vee, \Rightarrow, \sim \rangle$ es exactamente **CL**. En ese sentido P10 es a **CL** precisamente como **E** es a la lógica intuicionista.[1]

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

1. La investigación aquí plasmada se desarrolló principalmente durante mi estancia como Visitante en la Universidad Nacional Australiana (01-11-1992 a 30-04-1993), gracias a una beca del MEC. Vaya mi profunda gratitud a Richard Sylvan, cuya ayuda ha tenido un valor enorme; a Graham Priest, R.K. Meyer y J. Slaney déboles útiles sugerencias y comentarios.

§4. Referenciass

[And&Bel]

Alan R. Anderson, Nuel D. Belnap, Jr., *et alii*, *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, vol. I. Princeton U.P., 1975.

[And_Bel_Dun]

Alan R. Anderson, Nuel D. Belnap, Jr. and J. Michael Dunn (with the collaboration of others) *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, vol. II. Princeton U.P., 1992.

[Avron]

Arnon Avron, «Whither Relevant Logic?», *Journal of Philosophical Logic* 21/3 (Aug 1992), pp. 243-82.

[Cos&Dub]

N.C.A. da Costa & L. Dubikajtis, «On Jaśkowski's Discussive Logic», *Non-Classical Logic, Model Theory and Computability*, ed. by Arruda, da Costa & Chuaqui. North-Holland, 1977, pp. 37-56.

[Dunn]

J. Michael Dunn, «Relevance Logic and Entailment», *Handbook of Philosophical Logic*, vol III, ed. by D. Gabbay & F. Guenthner, Reidel, 1986, pp. 117-24.

[Méndez]

José M. Méndez, «The Compatibility of Relevance and Mingle», *Journal of Philosophical Logic* 17/3 (Aug 1988), pp. 279-88.

[Orayen]

Raúl Orayen, «Una evaluación de las críticas relevantistas a la lógica clásica», *Lógica y filosofía del lenguaje*, ed. by S. Alvarez, F. Broncano & M.A. Quintanilla. Universidad de Salamanca, 1986, pp. 73-88.

[Res&Bra]

Nicholas Rescher & R. Brandom, *The Logic of Inconsistency*, Blackwell, 1979.

[RLR]

Richard Routley, Val Plumwood, R.K. Meyer & R.T. Brady, *Relevant Logics and Their Rivals*. Atascadero (California): Ridgeview, 1982.

[Syl&Urb]

Richard Sylvan & Igor Urbas, *Factorisation Logics*. Canberra: Australian National University, 1989.